

### • قابلية الاشتقاق عند عدد حقيقي

ف دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  إذا و فقط إذا كانت نهاية الدالة  
 عددا حقيقيا عندما  $h$  يؤول إلى 0.  
 هذه النهاية تسمى العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $x_0$  و يرمز له  $f'(x_0)$ .  
 نكتب  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$  أو  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

### • قابلية الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة لدالة

ف دالة معرفة على مجال  $I$ .  
 الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $I$  إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$   
 من المجال  $I$ .  
 الدالة  $f' : x \mapsto f'(x)$  حيث  $f'(x)$  هو العدد المشتق للدالة  $f'$   
 عند العدد  $x$  تسمى الدالة المشتقة للدالة  $f$ .

### • معادلة المماس

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد الحقيقي  $x_0$ .  
 $(\mathcal{E}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم  $(0; \vec{i}, \vec{j})$ .  
 إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل مماسا  $(T)$  عند النقطة  $A$  فاصلتها  $x_0$ .  
 معامل توجيه المماس  $(T)$  هو  $f'(x_0)$ .  
 معادلة المماس  $(T)$  هي :  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

### • التقريب التآلفي لدالة عند عدد حقيقي

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 الدالة التآلفية  $g$  المعرفة كما يلي :  $g : x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$   
 تسمى التقريب التآلفي للمماس للدالة  $f$  عند العدد  $x_0$ .

### • قابلية الاشتقاق والاستمرارية

ف دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .  
 إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  فإن  $f$  مستمرة عند  $x_0$ . (العكس غير صحيح).

الدوال المشتقة لدوال مأثوفة

الدالة ...	معرفة على ...	قابلة للاشتقاق على ...	دالتها المشتقة هي ...
$k \in \mathbb{R} : x \mapsto k$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$n \in \mathbb{Z} : x \mapsto x^n$	$\mathbb{R}, \text{ إذا كان } n \geq 0$ $\mathbb{R}^*, \text{ إذا كان } n < 0$	$\mathbb{R}, \text{ إذا كان } n \geq 0$ $\mathbb{R}^*, \text{ إذا كان } n < 0$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$	$[0 ; +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$

العمليات الجبرية

$f, g$  دالتان معرفتان على نفس المجال  $I$  :  $k$  عدد حقيقي.  
إذا كانت  $f$  و  $g$  قابلتين للاشتقاق على المجال  $I$  فإن :

• الدالة  $f+g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

• الدالة  $k.f$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(k.f)'(x) = k.f'(x)$

• الدالة  $f.g$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و  $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

• الدالة  $\frac{1}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$

• الدالة  $\frac{f}{g}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  حيث  $g(x) \neq 0$  و  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$

الدالة المشتقة لدالة مركبة

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  يشمل العدد  $x_0$ ،  $g$  دالة معرفة على مجال  $J$  يشمل  $f(x_0)$ .  
• إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$  و  $g$  قابلة للاشتقاق عند  $f(x_0)$  فإن الدالة  $g \circ f$  قابلة للاشتقاق عند  $x_0$

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'[f(x_0)] \quad \text{و}$$

حالات خاصة

$f$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  :  $n$  عدد صحيح.

• الدالة  $g : x \mapsto [f(x)]^n$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) \neq 0$  من أجل  $n < 0$ )

$$g'(x) = n.f'(x).[f(x)]^{n-1} \quad \text{و}$$

• الدالة  $h : x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  (حيث  $f(x) > 0$ ) و  $h'(x) = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{f(x)}}$

## • اتجاه تغيرات دالة

$f$  دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $f'(x) = 0$  فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .
- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $f'(x) \geq 0$  (  $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$  ) فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .
- إذا كان من أجل كل عدد  $x$  من  $I$  ،  $f'(x) \leq 0$  (  $f'(x) = 0$  من أجل قيم معزولة من  $I$  ) فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .

## • النقطة الحدية للمنحنى

- $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح  $I$  يشمل العدد  $x_0$ .
- $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.
- إذا كانت  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$  فإن  $f'(x_0) = 0$ .
- إذا كانت  $f'$  تنعدم عند  $x_0$  و تغير إشارتها فإن  $f$  تقبل قيمة حدية محلية عند  $x_0$ .
- العدد  $f(x_0)$  هو قيمة عظمى أو قيمة صغرى للدالة  $f$  عند  $x_0$  من  $I$ .
- في هذه الحالة النقطة ذات الإحداثيين  $(x_0 ; f(x_0))$  تسمى نقطة حدية للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$ .
- المماس للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  عند نقطة حدية فاصلتها  $x_0$ ، يوازي محور الفواصل و معادلته هي  $y = f(x_0)$ .

## • الدوال المشتقة المتتابة

- $f$  دالة قابلة للاشتقاق  $n$  مرة على مجال  $I$  حيث  $n \geq 1$ .
- $f'$  دالتها المشتقة من المرتبة 1 :  $f^{(2)} = f'' = (f')'$  ؛ دالتها المشتقة من المرتبة 2 : ...
- $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$  دالتها المشتقة من المرتبة  $n$ .

$$\text{نضع : } f'(x) = \frac{df}{dx} \text{ أو } y' = \frac{dy}{dx} \text{ ؛ } f''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2f}{dx^2} \text{ ؛ } f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

## • نقطة إنعطاف لمنحنى

- $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  و قابلة للاشتقاق مرتان على  $I$  .  $x_0$  ينتمي إلى  $I$  .  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في مستو منسوب إلى معلم.
- إذا كانت الدالة  $f''$  تنعدم و تغير الإشارة عند  $x_0$  فإن النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$  تسمى نقطة انعطاف للمنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  الممثل للدالة  $f$ .
- المماس عند النقطة  $A$  يقطع المنحنى  $(\mathcal{C}_f)$  فيها.



### المعادلات التفاضلية

$f$  دالة مألوفة، مستمرة على مجال  $I$ .

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$

• نبحث عن الدوال  $g$  القابلة للاشتقاق مرة أو مرتين على  $I$  حيث  $g'(x) = f(x)$  أو  $g''(x) = f(x)$ .

• حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال  $x \mapsto g(x)$ .

• لحل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  نستعين بجدول الدوال المشتقة لدوال مألوفة.

### مخطط لدراسة دالة

يمكن تنظيم دراسة دالة  $f$  حسب المخطط التالي :

• نعين مجموعة التعريف (تبسيط عبارة  $f(x)$  عند الضرورة).

• نعين مجموعة دراسة الدالة : خواص هندسية للمنحنى (دالة فردية، دالة زوجية، دالة دورية).

• نحسب النهايات عند حدود مجموعة الدراسة.

• ندرس الاستمرارية، الاشتقاق، التغيرات :

نحسب الدالة المشتقة، ندرس إشارتها ثم نستنتج اتجاه تغير الدالة.

• ندرس الفروع اللانهائية و المستقيمات المقاربة.

• نرسم التمثيل البياني بعد تعليم بعض النقاط الخاصة (مركز تناظر، نقطة إنعطاف، ...) و بعض

المستقيمات الخاصة (محور تناظر، مستقيمات مقاربة، مماسات، ...).

• نستفيد من الخواص البارزة لانحياز الرسم (عناصر التناظر، ...).

1 دراسة قابلية اشتقاق دالة عند عدد حقيقي وتعيين العدد المشتق

تمرين

• أدرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد الحقيقي  $x_0$  ثم عين العدد المشتق  $f'(x_0)$  عند وجوده في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x} \quad \bullet 4 \quad \quad x_0 = 0 : f(x) = x^2 - 2x - \sin x \quad \bullet 1$$

$$x_0 = 1 : f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \bullet 5 \quad \quad x_0 = -1 : f(x) = (2x-3)^2 \quad \bullet 2$$

$$x_0 = 0 : f(x) = x^2 + |x| \quad \bullet 3$$

حل

1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 - 2x - \sin x$  عند العدد 0.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  مجموع دوال معرفة على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 2x - \sin x}{x} = x - 2 - \frac{\sin x}{x}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -3 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 2 - \frac{\sin x}{x} \right) = 0 - 2 - 1 = -3 \text{ و}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  عندما  $x$  يؤول إلى 0 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق

عند العدد 0 و العدد المشتق للدالة  $f$  عند 0 هو  $f'(0)$  حيث  $f'(0) = -3$ .

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = (2x-3)^2$  عند -1.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأنها مربع دالة معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(-1) = 25$ .  
لدينا من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن -1.

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \frac{(2x-3)^2 - 25}{x+1} = \frac{(2x-8) \times 2(x+1)}{x+1} = 4x - 16$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -20 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (4x - 16) = -20 \text{ لدينا}$$

بما أن نهاية النسبة  $\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$  عند ما يؤول  $x$  إلى -1 هي عدد حقيقي، فإن الدالة  $f$  قابلة

للاشتقاق عند -1 و  $f'(-1) = -20$ .

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x^2 + |x|$  عند العدد 0.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (مجموع دالتين معرفتين على  $\mathbb{R}$ ) و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 + |x|}{x} = x + \frac{|x|}{x}, \text{ لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير منعدم,}$$

## طرائق

نعلم أن  $|x| = x$  إذا كان  $x \geq 0$  و  $|x| = -x$  إذا كان  $x \leq 0$ .

$$\lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \geq 0} \left( x + \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \geq 0} (x + 1) = 1 \quad \text{إذن}$$

$$\lim_{x \leq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \leq 0} \left( x - \frac{x}{x} \right) = \lim_{x \leq 0} (x - 1) = -1 \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \leq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \quad \text{بما أن}$$

فإن النسبة  $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  لا تقبل نهاية عند العدد 0.

و بالتالي الدالة  $f$  حيث  $f(x) = x^2 + |x|$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 0 مع الملاحظة أن  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليمين و  $f'(0) = 1$  و قابلة للاشتقاق عند 0 عن اليسار و  $f'(0) = -1$ .

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ:  $f(x) = \sqrt{x}$  عند 0. الدالة  $f$  معرفة عند 0 و  $f(0) = 0$ .

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ موجب تماما ،}$$

$$\lim_{x \geq 0} \sqrt{x} = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \geq 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

و بالتالي  $\lim_{x \geq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$  . هذه النهاية ليست عددا حقيقيا.

ينتج أن الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \sqrt{x}$  غير قابلة للاشتقاق عند 0.

4. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  عند 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

بما أن الدالة  $f$  غير معرفة عند العدد 1 فإنها غير قابلة للاشتقاق عند العدد 1.

## 2 تعيين معادلة مماس للمنحنى الممثل لدالة عند نقطة منه فاصلتها $x_0$

### تمرين

• في كل حالة من الحالات التالية، حدد إن كان المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل مماسا أو نصف مماس عند النقطة ذات الفاصلة  $x_0$ . عين معادلة لهذا المماس عند وجوده.

$$x_0 = 1 : f(x) = |x^3 - 1| \quad \bullet 3$$

$$x_0 = 1 : f(x) = 3x^2 - x - 2 \quad \bullet 1$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f(x) = \cos x \quad \bullet 4$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} \quad \bullet 2$$



1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = 3x^2 - x - 2$  عند العدد 1.  
الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3x^2 - x - 2}{x - 1} = \frac{(3x + 2)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x + 2) = 5 \text{ لدينا أيضا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 5$  هي عدد حقيقي فإن  $f$  قابلة للاشتقاق عند 1 و  $f'(1) = 5$ .

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا عند النقطة ذات الفاصلة 1، معادلته  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ .

لدينا  $f(1) = 0$  و  $f'(1) = 5$ . إذن معادلة المماس هي  $y = 5x - 5$ .

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$  عند العدد 2.

الدالة  $f$  معرفة عند كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x^2 - x - 2 \geq 0$ .

2 و -1 هما جذرا ثلاثي الحدود  $x^2 - x - 2$ .

إذن مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$  و  $f(2) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]2; +\infty[$  :

$$\frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \frac{\sqrt{(x + 1)(x - 2)}}{x - 2} = \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 2}} = +\infty \text{ لدينا}$$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = +\infty$  ليست عددا حقيقيا فإن الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند العدد 2.

ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نصف مماس يوازي محور الترتيب معادلته  $x = 2$  مع  $x \geq 2$ .

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = |x^3 - 1|$  عند العدد 1.

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و  $f(1) = 0$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1| - 0}{x - 1} = \frac{|x^3 - 1|}{x - 1}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = x^2 + x + 1 \text{ فإن } x > 1 \text{ إذا كان}$$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{-(x^3 - 1)}{x - 1} = \frac{-(x - 2)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = -(x^2 + x + 1) \text{ فإن } x < 1 \text{ و إذا كان}$$

$$\lim_{x \geq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \geq 1} (x^2 + x + 1) = 3 \text{ ينتج أن}$$

$$\lim_{x \leq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \leq 1} [-(x^2 + x + 1)] = -3 \text{ و}$$

نلاحظ أن  $\lim_{x \geq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  و  $\lim_{x \leq 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  هما عدداً حقيقيين مختلفان إذن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد 1 عن اليمين و عن اليسار و ليست قابلة للاشتقاق عند العدد 1 .  
و بالتالي المنحى (E) يقبل نصف مماس  $(\Delta_1)$  عن اليمين و نصف مماس  $(\Delta_2)$  عن اليسار عند النقطة من (E) ذات الفاصلة 1.

• إيجاد معادلة نصف المماس  $(\Delta_1)$ .

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = 3 \text{ أي } y = 3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (\Delta_1) : y = 3x - 3 \text{ حيث } x \geq 1$$

• إيجاد معادلة نصف المماس  $(\Delta_2)$ .

$$\text{لدينا } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ حيث } f'(1) = -3$$

$$\text{أي } y = -3(x - 1) + 0$$

$$\text{إذن } (\Delta_2) : y = -3x + 3 \text{ حيث } x \leq 1$$

3. دراسة قابلية اشتقاق الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \cos x$  عند العدد  $\frac{\pi}{4}$ .

$$\text{الدالة } f \text{ معرفة على } \mathbb{R} \text{ و } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $\frac{\pi}{4}$  :

$$\frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-2 \sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} \cdot \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\sin \left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)}{\left(\frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا}$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$



ينتج أن الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند العدد  $\frac{\pi}{4}$  و  $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  و بالتالي المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل مماسا  $(\Delta)$

عند النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\pi}{4}$  معادلته  $y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

أي  $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$  . ينتج أن  $(\Delta) : y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{4}\right)$

### 3 تعيين الدالة المشتقة لدالة

#### تمرين

• عين مجموعة تعريف كل دالة  $f$  من الدوال التالية ثم مجموعة قابلية الاشتقاق و الدالة المشتقة لها.

$$f(x) = \cos 2x - 2\cos x \quad \bullet 5$$

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)} \quad \bullet 6$$

$$f(x) = (5x^2 - x)^3 \quad \bullet 7$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \bullet 8$$

$$f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1} \quad \bullet 2$$

$$f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad \bullet 3$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1} \quad \bullet 4$$

#### حل

1. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x^2 + x + \frac{3}{x}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 2x + 1 - \frac{3}{x^2}$

2. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]1; +\infty[$  و  $]-\infty; 1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن 1 ،  $f'(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{(x - 1)^2}$

3. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = x + 3\sqrt{x^2 - 1}$

الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]-1; +\infty[$  و  $]-\infty; -1[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجموعة  $]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$   $f'(x) = 1 + \frac{3x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

4. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}$  .

الدالة  $f$  معرفة على  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[ \cup ]-\infty; -1 - \sqrt{2}]$

و قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[$  و  $] -\infty; -1 - \sqrt{2}]$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[-1 + \sqrt{2}; +\infty[ \cup ]-\infty; -1 - \sqrt{2}]$  :  $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}$

5. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$  .

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $f'(x) = -2\sin 2x + 2\sin x$

6. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  حيث :  $f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}$  .

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $1 - \cos x \geq 0$  .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  يختلف عن  $2k\pi$  :  $f'(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}}$

7. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = (5x^2 - x)^3$  .

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

بوضع  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 5x^2 - x$

لدينا الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 10x - 1$  .

نلاحظ أن  $f(x) = [g(x)]^3$  . إذن  $f'(x) = 3 \times g'(x) \cdot g(x)^2$

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3(10x - 1)(5x^2 - x)^2$  .

8. تعيين الدالة المشتقة للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  .

الدالة  $f$  معرفة و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  .

لتكن  $g$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $g(x) = 2x + \frac{\pi}{3}$

و  $h$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $h(x) = \sin x$  . ينتج أن  $f = h \circ g$  .

الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $g'(x) = 2$  .

و الدالة  $h$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $h'(x) = \cos x$  .

ينتج أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = g'(x) \times h'(g(x)) = 2 \times \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  .

إذن الدالة المشتقة للدالة  $f$  هي الدالة  $f'$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$  .

## تمرين

• ادرس إتجاه تغيرات كل دالة  $f$  من الدوال التالية المعرفة كما يلي :

$$f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x} \quad \bullet 3 \quad \left| \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 2} \quad \bullet 1$$

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} \quad \bullet 4 \quad \left| \quad f(x) = x + \sin x \quad \bullet 2$$

## حل

1. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ .

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (لأن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $x^2 + 2 > 0$ ).

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب ،  $f'(x) \geq 0$  . إذن الدالة  $f$  متزايدة على  $[0 ; +\infty[$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  سالب ،  $f'(x) \leq 0$  . إذن الدالة  $f$  متناقصة على  $] -\infty ; 0]$ .

2. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x + \sin x$ .

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 1 + \cos x$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $1 + \cos x \geq 0$ .

و بالتالي من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) \geq 0$  . ينتج أن الدالة متزايدة على  $\mathbb{R}$ .

3. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = 5x + 1 + \frac{1}{x}$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجموعة  $] -\infty ; 0[ \cup ] 0 ; +\infty [$ .

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $] -\infty ; 0[$  و  $] 0 ; +\infty [$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم ،  $f'(x) = 5 - \frac{1}{x^2}$ .

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل.

الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين

$$\left] -\infty ; -\frac{\sqrt{5}}{5} \right] \quad \text{و} \quad \left[ \frac{\sqrt{5}}{5} ; +\infty \right[$$

و متناقصة على كل من المجالين  $\left[ -\frac{\sqrt{5}}{5} ; 0 \right[$  و  $\left] 0 ; \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{5}}{5}$	$0$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+



4. دراسة تغيرات الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ .

الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[0; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]0; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  موجب تماما ،  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]0; 1[$

و متزايدة على المجال  $[1; +\infty[$ .

## 5 إيجاد القيم الحدية للدالة

### تمارين

• عين القيم الحدية لكل دالة من الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

3.  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$

1.  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

2.  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$

### حل

1. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = -4x^3 + 4x$

$f'(x) = 4x(1-x)(1+x)$  يكتب على الشكل

$x$	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$(1-x)(1+x)$	-	○	+	+	○	-
$4x$	-	-	○	+	+	+
$f'(x)$	+	○	-	+	○	-

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند كل

من الأعداد -1 ، 0 ، 1

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند -1 على المجال  $]-\infty; 0[$  و هي  $f(-1) = 2$ .

و الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند 0 على المجال  $[-1; 1]$  و هي  $f(0) = 1$ .

و الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى عند 1 على المجال  $[0; +\infty[$  و هي  $f(1) = 2$ .

2. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$ .

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $]-\infty; +\infty[$  و قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; +\infty[$ .

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 12x^2 - 3$

$f'(x) = 3(2x+1)(2x-1)$  يكتب أيضا على الشكل :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

إشارة  $f'(x)$  ملخصة في الجدول المقابل :

• استنتاج القيم الحدية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند  $-\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة كبرى على المجال  $]-\infty ; \frac{1}{2}]$  وهي  $f(-\frac{1}{2}) = 0$  حيث  $f(-\frac{1}{2}) = 0$ .

و تقبل قيمة صغرى على المجال  $]-\frac{1}{2} ; +\infty[$  وهي  $f(\frac{1}{2}) = -2$  حيث  $f(\frac{1}{2}) = -2$ .

3. تعيين القيم الحدية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$ .

• الدالة  $f$  معرفة على المجال  $[2 ; +\infty[$ .

• الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]2 ; +\infty[$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]2 ; +\infty[$  :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

$f'(x)$  يكتب أيضا على الشكل :  $f'(x) = \frac{\sqrt{x-2} - 1}{\sqrt{x-2}}$

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]2 ; +\infty[$  هي إشارة  $\sqrt{x-2} - 1$  على المجال  $]2 ; +\infty[$ .

إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]2 ; +\infty[$  ملخصة في الجدول المقابل :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

الدالة  $f'$  تنعدم و تغير الإشارة عند 3

إذن الدالة  $f$  تقبل قيمة صغرى عند

العدد 3 وهي  $f(3) = 1$  حيث  $f(3) = 1$ .

## 6 البحث عن الدوال المشتقة المتتابة لدالة

### تمرين 1

- عين الدالة المشتقة الثانية للدالة  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
- أثبت أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  الممثل للدالة  $f$  يقبل نقطة انعطاف، يطلب تعيين إحداثيها.

حل

الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  و قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  دالة كثير الحدود)

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f'(x) = 3x^2 - 6x$

الدالة  $f'$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f''(x) = 6x - 6$

الدالة  $f''$  تنعدم عند العدد 1 و تغير الإشارة إذن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقبل نقطة انعطاف إحداثيها (1 ; 2).

### تمرين 2

- عين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  لكل من الدالتين  $\sin$  و  $\cos$  :  $n$  عدد طبيعي غير منعدم.

1. تعيين الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$ .

الدالة  $\sin$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$ ،  $n$  مرة حيث  $n \geq 1$ .

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $(\sin)'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$$(\sin)''(x) = (\cos x)'(x) = -\sin x = \sin\left(x + \pi\right) = \sin\left(x + 2 \frac{\pi}{2}\right)$$

يمكن وضع التخمين التالي :

من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم، من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$  . استعمال الاستدلال بالتراجع لإثبات صحة هذا التخمين.

من أجل  $n = 1$  :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$  أي  $(\sin)'(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

نفرض أن من أجل العدد الطبيعي  $k$  غير المنعدم،  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right)$  .

• حساب  $(\sin)^{(k+1)}(x)$ .

$$(\sin)^{(k+1)}(x) = \left[ \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right) \right]' = \cos\left(x + k \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1) \frac{\pi}{2}\right)$$
 لدينا

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي  $k$  غير منعدم و من أجل كل عدد حقيقي  $x$ ،

إذا كان  $(\sin)^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \frac{\pi}{2}\right)$  فإن  $(\sin)^{(k+1)}(x) = \sin\left(x + (k+1) \frac{\pi}{2}\right)$ .

إذن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم :  $(\sin)^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$

و بالتالي الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\sin$  هي الدالة  $\sin^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

2. نبرهن بنفس الطريقة أن الدالة المشتقة من المرتبة  $n$  للدالة  $\cos$  هي الدالة  $\cos^{(n)}$  المعرفة على  $\mathbb{R}$

كما يلي :  $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$

8 حل معادلة تفاضلية من الشكل  $y' = f(x)$  أو  $y'' = f(x)$  حيث  $f$  دالة ماثوفة

تمرين

• حل كل معادلة التفاضلية من المعادلات التالية :

$$y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \quad .5$$

$$y'' = 2 \quad .6$$

$$y'' = \sin x \quad .7$$

$$y'' = \cos x \quad .8$$

$$y' = 3x - 2 \quad .1$$

$$y' = \sin x \quad .2$$

$$y' = x + \sin x \quad .3$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad .4$$



1. حل المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = 3x - 2$ .

الدالة  $f$  حيث  $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$  تحقق المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  لأن  $f'(x) = 3x - 2$ .

ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة التفاضلية  $y' = 3x - 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

2. حل المعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ .

نبحث عن الدوال العددية  $f$  القابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  حيث  $f'(x) = \sin x$ .

نعلم أن  $\cos'x = -\sin x$

إذن  $-\cos'x = \sin x$  أي  $(-\cos)'(x) = \sin x$

وبالتالي الدالة  $-\cos$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y' = \sin x$ . ينتج أن الدوال العددية حلول المعادلة

التفاضلية  $y' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة كما يلي :  $f(x) = -\cos x + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي.

3. حل المعادلة التفاضلية  $y' = x + \sin x$ .

باستعمال النتائج المحصل عليها في الحالتين السابقتين، تكون حلول المعادلة التفاضلية

$$y' = x + \sin x \quad \text{هي الدوال } f \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$$

حيث  $c$  عدد حقيقي.

4. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x} + c \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

5. حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 2\sqrt{x^2+x+1} \quad \text{حيث } c \text{ عدد حقيقي.}$$

6. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = 2$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = x^2 + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

7. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \sin x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\sin x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

8. حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \cos x$  هي الدوال  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = -\cos x + cx + d \quad \text{حيث } c \text{ و } d \text{ عددان حقيقيان.}$$

## تمارين و حلول نموذجية

### تمرين

•  $f$  هي الدالة المعرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2}$

(ع) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و مجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. عين مجموعة تعريف  $D$  للدالة  $f$ .
2. أثبت أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$  ، حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.
3. عين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .
4. ادرس تغيرات الدالة  $f$  و انجز جدول تغيراتها.
5. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ع).
6. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (ع) و المستقيم المقارب  $(\Delta)$  للمنحنى (ع).
7. احسب  $f(-1)$  . ماذا تستنتج ؟ ارسم المنحنى (ع) في المعلم السابق.
8. ناقش بيانها ، عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$  حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

### حل

1. الدالة  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  . إذن  $D = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

2. من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ، 
$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  :  $f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$  إذن  $a = 2$  :  $b = 1$  :  $c = 1$

3. تعيين نهايات الدالة  $f$  عند حدود المجموعة  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

( $f$ ) هي مجموعة دالتين  $f_1$  و  $f_2$  حيث  $f_1(x) = 2x + 1$  و  $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} (2x^3 + x^2 + 1) = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $x > 0$

إذن  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  أي  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

4. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على كل من المجالين  $]0; +\infty[$  و  $]-\infty; 0[$

و من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3} = \frac{2(x-1)(x^2 + x + 1)}{x^3}$$

دراسة إشارة  $f'(x)$  على  $D$ .

من الجدول المقابل، ينتج أن الدالة  $f$  متزايدة على كل من المجالين  $]-\infty; 0[$  و  $]1; +\infty[$

و متناقصة على المجال  $]0; 1[$ .

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x-1$	-		- 0 +	+
$x^2 + x + 1$	+		+	+
$x^3$	-		+	+
$f'(x)$	+		- 0 +	+

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	4	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة يكون كالآتي :  
نلاحظ أن النقطة ذات الإحداثيين  $(1; 4)$  هي نقطة حدية صغرى للمنحنى  $(\mathcal{C})$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

5. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  إذن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  مستقيم مقارب للمنحنى  $(\mathcal{C})$ ، يوازي محور الترتيب.

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  غير منعدم :  $f(x) - 2x - 1 = \frac{1}{x^2}$   
لدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x + 1)) = 0$

إذن المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = 2x + 1$  مستقيم مقارب مائل للمنحنى  $(\mathcal{C})$ .

6. دراسة الوضع النسبي للمنحنى  $(\mathcal{C})$  و المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

دراسة إشارة العبارة  $f(x) - (2x + 1)$  على  $D$ .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$   
نلاحظ أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $\frac{1}{x^2} > 0$

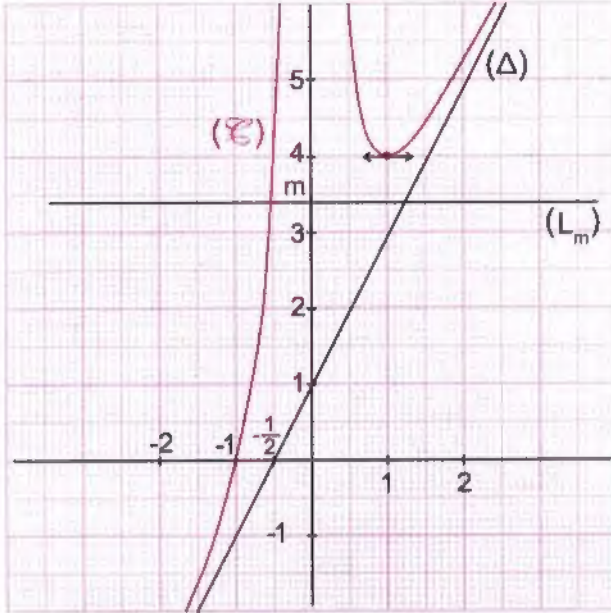
إذن من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $D$  ،  $f(x) - (2x + 1) > 0$  ،  
ينتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  فوق المستقيم المقارب المائل  $(\Delta)$ .

7.  $f(-1) = 0$ . نستنتج أن المنحنى  $(\mathcal{C})$  يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الإحداثيين  $(-1; 0)$ .



## تمارين و حلول نموذجية

8. رسم المنحنى (E).



9. مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  في  $\mathbb{R}$  بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي  $m$ .

المعادلة  $2x^3 + (1-m)x^2 + 1 = 0$  تكتب على الشكل  $\frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2} = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$  أو أيضا  $f(x) = m$  حيث  $x$  ينتمي إلى  $D$ .

معادلة المنحنى (E) هي  $y = f(x)$ .

ليكن  $(L_m)$  المستقيم ذا المعادلة  $y = m$  : عدد حقيقي.

حلول المعادلة  $f(x) = m$  هي فواصل نقطة تقاطع (E) و  $(L_m)$ .

النتائج تلخص في الجدول الموالي :

m	$-\infty$	4	$+\infty$
النتائج	المعادلة تقبل حلا واحدا سالبا		المعادلة تقبل ثلاثة حلول : حل سالب و حلان مختلفان موجبان.
	المعادلة تقبل حلا سالبا و حلا مضعفا موجبا و هو 1.		

## تمارين و مسائل

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + x^2 + 3}{x} \quad .1$$

$$f: x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 4}{x - 2} \quad .2$$

$$f: x \mapsto \frac{3x^2 - 4x}{4(1 - x)} \quad .3$$

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + 4x^2 + x - 2}{(x + 1)^2} \quad .4$$

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 6}{2(x + 1)} \quad .5$$

$$f: x \mapsto 2x + 1 - \frac{2}{(1 - x)^2} \quad .6$$

$$f: x \mapsto x + 3\sqrt{x^2 - 1} \quad .7$$

$$f: x \mapsto (x - 1)\sqrt{2x} \quad .8$$

$$f: x \mapsto \sqrt{\frac{2 - x}{2 + x}} \quad .9$$

$$f: x \mapsto \frac{1}{4} - \left(\frac{2x + 1}{4}\right) \cos \pi x \quad .10$$

$$f: x \mapsto \sqrt{\cos 2x} \quad .11$$

$$f: x \mapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x} \quad .12$$

### الإستمرارية وقابلية الاشتقاق

4 نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :

$$f(x) = 1 - (x - 1)|x - 1|$$

. ادرس إستمرارية  $f$  عند العدد 1.

. ادرس قابلية اشتقاق  $f$  عند العدد 1.

5  $f$  هي دالة معرفة كمايلي :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} - \frac{1}{x}$$

1. عين مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

2. نعرف الدالة  $g$  كما يلي :

$$g(x) = f(x) \text{ إذا كان } x \neq 0 \text{ و } g(0) = 0$$

هل الدالة  $g$  قابلة للاشتقاق عند 0 ؟

هل الدالة  $g$  مستمرة عند 0 ؟

### ابلية الاشتقاق - العدد المشتق

1 ادرس قابلية اشتقاق الدالة  $f$  عند العدد  $x_0$

عين العدد المشتق لها عند  $x_0$  في كل حالة من

حالات التالية :

$$x_0 = 1 : f: x \mapsto -\frac{x^2}{2} + 3x - 1$$

$$x_0 = 5 : f: x \mapsto \frac{x + 2}{-x + 7}$$

$$x_0 = -2 : f: x \mapsto 3x^5 - 4x^3 + 21$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto 2 - x + x \sin |x|$$

$$x_0 = \frac{\pi}{4} : f: x \mapsto \cos x$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto (2x - 3)^2$$

$$x = 0 : f: x \mapsto x\sqrt{x}$$

$$x_0 = 0 : f: x \mapsto |x|$$

### معادلة المماس

2 عين معادلة المماس (أو نصف مماس) للمنحنى

مثل للدالة  $f$  عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $x_0$

في كل حالة من الحالات التالية :

$$x_0 = 3 : f(x) = x^2 + x - 5$$

$$x < 1 : f(x) = \sqrt{1 - x}$$

$$f(1) = 0$$

$$x > 1 : f(x) = -\sqrt{x - 1}$$

$$x_0 = 1$$

$$x_0 = 2 : f(x) = |x^3 - 8|$$

$$x_0 = 0 : f(x) = \sqrt{x}$$

$$x_0 = 2 : f(x) = \sqrt{|x - 2|}$$

$$x_0 = 1 : f(x) = x^2 + 2|x - 1|$$

$$x_0 = -2 : f(x) = x + \sqrt{4 - x^2}$$

### الدوال المشتقة

3  $f$  دالة معرفة على مجموعة  $D$ .

عين المجموعة  $D$  و المجموعة  $D'$  التي تقبل عليها  $f$

لاشتقاق ثم عين الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$

في كل حالة من الحالات التالية :

مسائل

- 10)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$  ( $\mathbb{E}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسحب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. أنجز جدول تغيرات الدالة  $f$ .
  3. عين إحداثيي  $A$  نقطة تقاطع ( $\mathbb{E}$ ) مع المحاور.
  4. بين أن النقطة  $A$  مركز تناظر المنحنى ( $\mathbb{E}$ ).
  5. ارسم المنحنى ( $\mathbb{E}$ ) والمماس عند  $A$ .
- الوحدة 2 cm.

- 11)  $f$  دالة كثير الحدود معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ .
1. ادرس تغيرات الدالة  $f$ .
  2. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلا واحدا حيث  $1,6 < \alpha < 1,7$ .
  - ب)  $g$  هي الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  كما يلي :  $g(x) = \frac{1-x}{1+x^3}$ .
- ( $\mathbb{E}$ ) المنحنى الممثل للدالة  $g$  في المستوي المنسحب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
- الوحدة 4 cm.

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  ( بإمكانك إستعمال نتائج السؤال 1).
2. عين معادلة المماس ( $\Delta$ ) للمنحنى ( $\mathbb{E}$ ) عند النقطة  $A$  فاصلتها 0.
3. ادرس الوضع النسبي للمنحنى ( $\mathbb{E}$ ) والمماس ( $\Delta$ ) في المجال  $]1; -1[$ . بين أن ( $\mathbb{E}$ ) يقطع ( $\Delta$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
4. ارسم المنحنى ( $\mathbb{E}$ )، المماس ( $\Delta$ ) والمماس ( $\Gamma$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

إتجاه التغيرات

- 6) عين مجموعة تعريف الدالة  $f$  ثم أدرس إتجاه تغيراتها على هذه المجموعة في كل حالة من الحالات التالية :
1.  $f(x) = x^3(1-x)^3$
  2.  $f(x) = x - 5\sqrt{x}$
  3.  $f(x) = \frac{3x^2 - x - 1}{x - 2}$
  4.  $f(x) = -x + 1 - \frac{4}{x^2}$
  5.  $f(x) = x + \sin x$
  6.  $f(x) = x - \tan x$
  7.  $f(x) = 2x^5 - 5x^4 + 4x^3$
  8.  $f(x) = \frac{2x-5}{x+1}$
  9.  $f(x) = \frac{x+1}{2x-5}$
  10.  $f(x) = 4x^3 - 6x^2$

الدوال المشتقة المتتابة

- 7)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  بين أن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم، الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق  $n$  مرة عند كل عدد حقيقي يختلف عن 1.
- عين، بدلالة  $n$  : عبارة  $f^{(n)}(x)$  من أجل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{1\}$ .

- 8) عين الدوال المشتقة المتتابة للدوال  $f$  في الحالات التالية :

1.  $f: x \mapsto x^5 - 2x^4 + x^2 - x + 1$
2.  $f: x \mapsto \frac{1}{2x-1}$
3.  $f: x \mapsto \sin 2x$

- 9)  $f$  دالة معرفة كما يلي :  $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$

- بين أن الدالة  $f$  تحقق المعادلة التفاضلية  $y'' + 9y = 0$



## تمارين و مسائل

ب. • لتكن  $\tilde{h}$  الدالة المعرفة كما يلي :

$$\tilde{h}(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$$

• احسب  $\tilde{h}(1)$ . حلل  $\tilde{h}(x)$  إلى جداء عوامل.

• ادرس إشارة  $\tilde{h}(x)$  حسب قيم العدد الحقيقي  $x$ .

2. • نريد دراسة الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^3 - x + 4}{x + 1} \quad \text{كما يلي :}$$

ليكن  $(\mathbb{E}_f)$  المنحنى الممثل لها.

أ. • ادرس تغيرات الدالة  $f$ .

ب. • بين أن من أجل كل عدد حقيقي  $x$

$$f(x) = ax^2 + bx + \frac{c}{x+1} \quad ; \quad \mathbb{R} - \{-1\}$$

حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

ج. • ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين  $(\mathbb{E}_f)$  و  $(\mathbb{E}_g)$ .

د. • ارسم بعناية المنحنيين  $(\mathbb{E}_f)$  و  $(\mathbb{E}_g)$

في نفس المعلم.

12.  $f$  دالة معرفة كما يلي:  $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

• عين العددين  $a$  و  $b$  حتى يقبل المنحنى الممثل

لدالة  $f$  مماسا عند النقطة  $O(0; 0)$  يوازي

مستقيم  $(D)$  ذا المعادلة  $y = 4x + 3$ .

• ادرس تغيرات الدالة  $f$  ثم ارسم المنحنى  $(\mathbb{E}_f)$

ممثل لها بعناية في معلم متعامد و متجانس

مناسب  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

13. حل كل معادلة من المعادلات التفاضلية التالية:

$$y'' = 0 \quad .6 \quad y' = 0$$

$$y'' = \frac{1}{2} \quad .7 \quad y' = -5$$

$$y'' = x - 2 \quad .8 \quad y' = \sqrt{2}x - 1$$

$$y'' = \frac{1}{2}x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad .9 \quad y' = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = \sin \frac{\pi}{3} x \quad .10 \quad y' = x - \cos 2x$$

14. • لتكن  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]a; +\infty[$

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

• احسب  $f'''(x) : f''(x) : f'(x)$ .

2. • ضمن عبارة  $f^{(n)}(x)$  من أجل  $n$  عدد طبيعي

غير منعدم.

وهن بالتراجع، صحة هذا التخمين.

3. • لتكن  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

عين عددين حقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  حيث من أجل كل عدد

$$g(x) = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-1} \quad , \quad ]1; +\infty[$$

احسب  $g^{(n)}(x)$  من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير منعدم.

15. • المستوي منسوب إلى معلم متعامد

و متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. • ارسم المنحنى  $(\mathbb{E}_g)$  الممثل للدالة  $g$

$$g(x) = x^2 - x \quad \text{المعرفة كما يلي :}$$